SISTEMI KOORDINAT IN RAZMIK

zf42

Kazalo

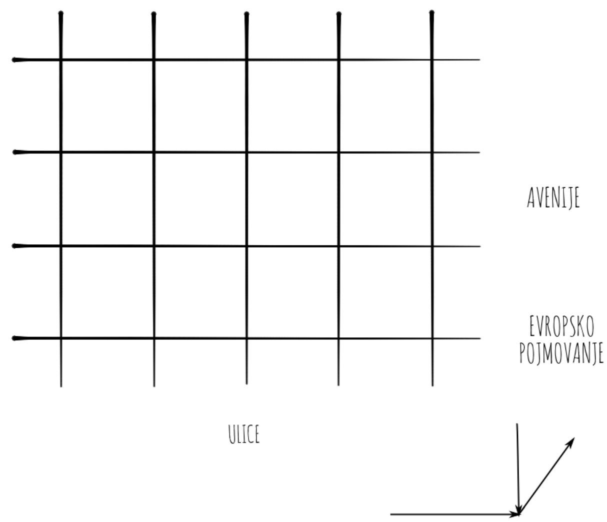
1. Uvod 1
2. Ponazoritev geometrijskega pomena g_{12} 4
3. Kako do Riemannove geometrije? 5
4. Prehod v fiziko 8

1. Uvod

Izhajamo iz Evklidovega pojma "razmik" na površini neomejene ravnine in iščemo njegov matematični izraz iz "sveta" dveh dimenzij. Evklidovi **premici** sta lahko **horizontala** in **vertikala**, ter gradita **Descartesov** (Cartesius, lat.) **koordinatni sistem**.

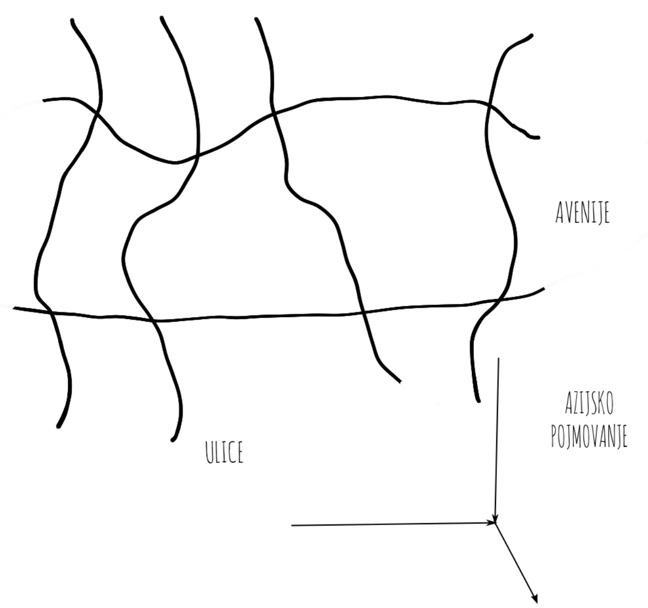
V literaturi se ta sistem omeni kot "mesh-system" ali "network enakih evklidskih kvadratov", po vzoru newyorških ulic (tukaj pa je že kartografski referenčni sistem) (Slika 1):

Date: 27. januar 2021.



Slika 1.

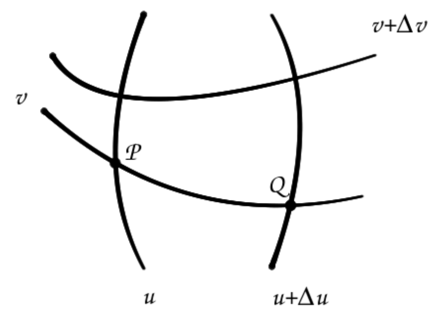
V Gaussovi posplošitvi Cartesiusove ideje postane slika malo kompleksnejša (Slika 2):



Slika 2.

Izid primerjave je neverjeten: Nemec (Gauss) je dokazal, da so Azijci pametnejši.

Sedaj pa odgovorimo na vprašanje: Česa se je Gauss domislil? Predpostavimo, da želimo izraziti razmik med točkama P in Q, ki sta definirani s presečiščema neke "v" krivulje z dvema "u" krivuljama, kot kaže slika (Slika 3):



Slika 3.

Koordinati teh točk sta (u, v) in $(u + \Delta u, v)$, razmik $\overline{PQ}$ pa zapišemo z Δs. Pri tem je povsem jasno: razmik med P in Q ni povsem določen s pomočjo Δu. Zadostno splošni izraz za Δs pa je vseeno mogoč! Tako, kot je razmik med dvema točkama, ki ležita na isti vzporednici odvisen od razlike v longitudi, je tudi razmik Δs med P in Q funkcija koordinatnih razlik Δu. Tako lahko zapišemo:

$$\Delta s = A\Delta u + B\Delta u^2 + C\Delta u^3 + \dots, \tag{1}$$

kjer so $A, B, C, \dots$ lastne magnitude. Če pa sta točki na diferencialnem razmiku, se (1) prelevi v

$$ds = A\,du, \tag{2}$$

A pa običajno zapišemo kot $\sqrt{g_{11}}$. Tako dobimo na "v" krivulji

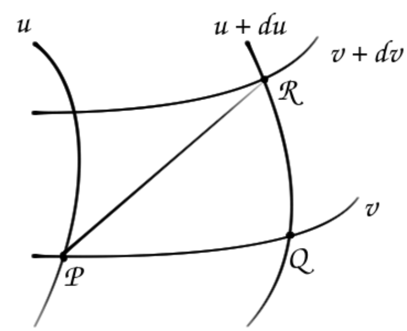
$$ds^2 = g_{11}\,du^2, \tag{3}$$

oziroma

$$ds^2 = g_{22}\, dv^2 \tag{4}$$

za razmik dveh točk na “u” krivulji.

Združena postopka iz slike (Slika 4)



Slika 4.

lahko rešita problem razmika med točkama P in R:

$$ds^2 = g_{11}\, du^2 + g_{12} du dv + g_{21} du dv + g_{22} dv^2. \tag{5}$$

Če sta g_{12} in g_{21} enaka, dobimo

$$ds^2 = g_{11}\, du^2 + 2 g_{12} du dv + g_{22} dv^2. \tag{6}$$

Zamenjavi $u = u_1$ in $v = u_2$ peljeta v običajen zapis

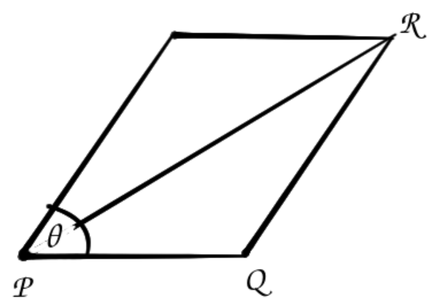
$$ds^2 = \sum g_{ik} du_i du_k \tag{7}$$

2. Ponazoritev geometrijskega pomena g_{12}

Elementarna geometrija nam pove

$$\overline{PR}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 + 2 \cos\theta\, \overline{PQ} \cdot \overline{QR}, \tag{8}$$

kot je razvidno iz slike (Slika 5),



SLIKA 5.

ki ponazori

$$\begin{aligned} ds^2 = du^2 + 2\cos\theta du dv + dv^2 \\ \Downarrow \\ g_{11} = 1 \\ g_{12} = \cos\theta \\ g_{22} = 1 \end{aligned} \tag{9}$$

3. KAKO DO RIEMANNOVE GEOMETRIJE?

Sodobna teorija nastaja iz elementarne diferencialne geometrije površin v evklidskem prostoru z običajnim matematičnim procesom abstrakcije. Površino v navadnem evklidskem prostoru zlahka opišemo s pomočjo kartezičnega koordinatnega sistema, v katerem so točke določene z njihovimi koordinatami $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$, kot "locus" vseh točk P katerih koordinate zadoščajo analitični relaciji

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{10}$$

ali v eksplicitni obliki

$$x_3 = \varphi(x_1, x_2), \tag{11}$$

ki misel pripelje k 2-dimenzionalni naravi površine. Asimetriji treh koordinat se zlahka izognemo skupaj z restrikcijo na f iz predstavitve (11): vpeljemo parametra u_1 in u_2, ki svobodno variirata v domeni Δ ravnine (u_1, u_2). Nakar lahko izberemo tri funkcije $\varphi_i(u_1, u_2)$, ki so definirane na Δ in diferenciabilne. Po definiciji

$$x_i = \varphi(u_1, u_2), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{12}$$

ustvarimo 2-dimenzionalno podmnožico točk v 3-dimenzionalnem evklidskem prostoru s kartezičnimi koordinatami X_i. Vpeljimo še novo množico koordinat s pomočjo relacij

$$u_i = U_i(v_1, v_2), \quad v_i = V_i(u_1, u_2), \tag{13}$$

s katerimi rešujemo osnovni problem: kako izraziti tiste zakone, ki **vsebujejo geometrijski notranji smisel** v obliki, ki je **neodvisna od naključne izbire površinskih koordinat**?

Kot primer tega pristopa si oglejmo krivuljo na površino, ki jo določa parameter τ iz oblike $u_i(\tau)$. Dolžina take krivulje med točkama za kateri velja $\tau = 0$ in $\tau = 1$, je

$$\begin{aligned} L = \int_0^1 ds = \int_0^1 \left[\left(\frac{dx_1}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\tau} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\tau = \\ = \int_0^1 \left(\sum_{i,k=1}^{2} g_{ik} \frac{du_i}{d\tau} \frac{du_k}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau, \end{aligned} \tag{14}$$

kjer je

$$g_{ik} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_k} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_k}. \tag{15}$$

Torej! V diferencialni obliki je infinitezimalni razmik dveh površinskih točk s koordinatnimi razlikami du_i

$$ds = \left(\sum_{i,k=1}^{2} g_{ik} du_i du_k \right)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

in na tej ravnini **se začne premišljevanje Riemanna.**

Riemann zastavi vprašanje: Ali se je Gauss prezgodaj ustavil?

Kratkomalo je ugotovil, da omejitev Gaussa, na primer dveh površinskih koordinat u_1, u_2, ni bila nujna. Problem očitno prekaša primer 2-dimenzionalne površine v 3-dimenzionalnem prostoru. Riemann potem hitro opazi, da je študij geometrije prostorov, v katerih je točka določena s poljubnim številom n koordinat $u_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, povsem mogoč. Tako se **infinitezimalni razmik** med dvema točkama s koordinatnima razlikama du_i lahko zapiše v posplošeni obliki

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik} du_i du_k, \tag{17}$$

kjer so g_{ik} v splošnem poljubno predpisane funkcije koordinat u_i : $g_{ik}(u_1, \ldots, u_n)$. **Osrednja novost je v sledečem: interval $\mathbf{ds^2}$ pri transformaciji koordinat ni odvisen od izbire koordinat.** Po transformaciji koordinat v poljubni sistem $\tilde{S}$ dobimo

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} \tilde{g}_{ik} d\tilde{u}_i d\tilde{u}_k \tag{18}$$

in tako pridemo do bistvenega spoznanja: posplošitve Gaussove diferencialne geometrije. Riemann je iz nespremenjene oblike geometrije dobil pojem **invariantnega intervala**. Torej! **$\mathbf{ds^2}$ je invarianta** neodvisno od izbire koordinat.

Rekapitulirajmo!

V primeru dveh dimenzij je imela matrika

$$g = g_{ik} \tag{19}$$

elemente g_{11}, $g_{12} = g_{21}$, g_{22}. V primeru treh dimenzij je število elementov g_{ik} **šest**. V primeru štirih dimenzij, ki je bistvenega pomena za **splošno relativnostno teorijo**, je število elementov **deset**, v kar se zlahka prepričamo:

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1du_2 + 2g_{13}du_1du_3 + 2g_{14}du_1du_4 + \\ + g_{22}du_2^2 + 2g_{23}du_2du_3 + 2g_{24}du_2du_4 + g_{33}du_3^2 + \\ + 2g_{34}du_3du_4 + g_{44}du_4^2. \end{aligned} \tag{20}$$

V primeru n-dimenzionalnega prostora pa jih bo

$$\frac{n(n+1)}{2}. \tag{21}$$

Poudarimo: du_1, du_2, du_3, du_4 so, v splošni relativnostni teoriji, razlike štirih Gaussovih koordinat za točki A in B, ki sta si neskončno blizu.

4. Prehod v fiziko

Svet fizike si iz sveta matematike sposodi sliko za $n = 4$. **Koordinate $\mathbf{x^\alpha}, (\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1, 2, 3})$ so rezervirane za prostor**, časovno koordinato x^t, “objekt” za hec, pa fiziki pišejo

$$x^t = x^4 \qquad ali \qquad x^t = x^0. \tag{22}$$

Tako je četrta koordinata: $\mathbf{x^0} = \mathbf{x^4}$ (odvisno od okusa)! Interval lahko zapišemo

$$ds^2 = g_{ik}dx^idx^k, \quad (i, k) = 0, 1, 2, 3 \tag{23}$$

ali

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \ (\alpha, \beta) = 1, 2, 3 \tag{24}$$

Opomba!

- Latinske črke se največkrat sprehajajo po prostor-času.
- Grške črke se največkrat sprehajajo po prostoru.
- Ni malo norcev, ki si izberejo ravno obratno, zato pozor!

Olajšanje pride po ugotovitvi, da so ortogonalni prostor-časi v relativnostni teoriji dokaj upravičeni. Takrat velja:

$$g_{0\alpha} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = 0, (\alpha \neq \beta) \tag{25}$$

in se metrika "olajša":

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{3} g_{\alpha\alpha}(dx^\alpha)^2. \tag{26}$$

Izbira:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\frac{1}{c}^2 \tag{27}$$

nas popelje v **metriko Minkowskega**:

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left\{\left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2\right\}, \tag{28}$$

ki je temelj **posebne relativnostne teorije**.

Pozor! Interval je tukaj v dimenziji časa. Razlaga se včasih zapiše

$$d\tau^2 = \left(dx^0\right)^2 - \frac{1}{c^2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(dx^\alpha\right)^2, \tag{29}$$

včasih pa ne. Takrat se $d\tau$ rezervira za pretok lastnega časa v eni točki (ko je $dx^\alpha = 0$) in v splošnem primeru dobimo iz (26)

$$d\tau^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2, \tag{30}$$

kjer je:
$d\tau$ = lastni čas = **invarianta, ki ni integrabilna**,
dx^0 = koordinatni čas, **ki je integrabilen, ni pa invarianten.**

Naj razložim! Poudarimo še enkrat: **invarianta ds**(= $\boldsymbol{d\tau}$) **je infinitezimalna**. Ta infinitezimala je kot **lastni čas** v povezavi z uro, **ki se giblje skupaj z opazovalcem.** Torej: **lastni čas je v**

različnih točkah na različne načine povezan s koordinatnim časom in ni integrabilen.

Koordinatni čas $x^0 = t$ je lastnost koordinatnega sistema, ki je tamle vsepovsod eno in isto. **Torej je integrabilen, ni pa invarianten, ker je relativiziran** (je pač entiteta relativnostne teorije). V povezavi s tem, je mogoče o starosti vesolja presojati le v koordinatnem času, ki spremlja posledice velikega poka (background radiation) v "zadnjem koordinatnem soredju fizike".

Vrnimo se k metriki (28)! Razvidno je:

(i) če sta v eni prostorski točki ($dx^\alpha = 0$) dva dogodka **časovno ločena** ($dx^0 \neq 0$), potem je interval

$$ds = \pm dx^0 \tag{31}$$

realno število;

(ii) če sta dva dogodka **sočasna** ($dx^0 = 0$) in prostorsko ločena, potem je interval

$$ds = \pm \left\{ -\frac{\sum_{\alpha=1}^{3} (dx^\alpha)^2}{c^2} \right\} = \pm i \frac{dl}{c} \tag{32}$$

imaginarno število.

To je trivialno. Obstaja pa tretja možnost: dva dogodka sta hkrati prostorsko in časovno ločena. Tudi v tem primeru sta možna dva izida:

(i) interval je realen; potem pravimo, da ima **naravo časa** (time-like);

(ii) interval je imaginaren; potem pravimo, da ima **naravo prostora** (space-like).

Zelo je zanimivo, kaj si o vsem tem mislijo **Rusi**! Oni vzamejo, da je četrta koordinata (čas) imaginarna, nakar interval zapišejo (v najbolj splošni obliki)

$$-ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2 g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{00} \left(dx^0\right)^2 \tag{33}$$

ali

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{00}\Big(dx^0\Big)^2, \quad \Big(dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0\Big) \tag{34}$$

za pretok časa v točki $x^\alpha = const., (\alpha = 1, 2, 3)$. Iz (34) sledi

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\, dx^0, \quad \Big(dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0\Big) \tag{35}$$

in ostaja še problem: kako določiti element prostorskega razmika dl? Ideja!

Iz točke A izstrelimo žarek svetlobe v točko B, ki je neskončno blizu. Nakar se žarek vrne točko A. Zapišemo

$$d(A, B) = dl = cdx^0\ (A \to B) \tag{36}$$

$$d(B, A) = dl = cdx^0\ (B \to A) \tag{37}$$

Za $ds = 0$ dobimo iz (33)

$$dx^0(A \to B) = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\, dx^\alpha dx^\beta}\right\} \tag{38}$$

in

$$dx^0(B \to A) = \frac{1}{g_{00}}\left\{g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\, dx^\alpha dx^\beta}\right\}, \tag{39}$$

oziroma

$$dx^0(A \to B) + dx^0(B \to A) = -\frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\, dx^\alpha dx^\beta} \tag{40}$$

Seštevek (40) ustavimo v (35)

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\left\{-\frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\, dx^\alpha dx^\beta}\right\}, \tag{41}$$

kar je izraz za razmik

$$dl = \frac{1}{2}\, c\, \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\ \Big\{dx^0(A \to B) + dx^0(B \to A)\Big\} \tag{42}$$

in dobimo

$$dl^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}}\right) dx^\alpha dx^\beta \tag{43}$$

ali

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{44}$$

kjer je

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{45}$$

tridimenzionalen metrični tenzor, ki definira metriko in notranjo povezavo med metriko realnega prostora in metriko štiridimenzionalnega prostor-časa!

Čudovito! Pa napačno! Zakaj?

Tenzor g_{ik} je odvisen od časovne koordinate x^0, kar pomeni, da se tudi prostorska metrika spreminja! Integracija (44) je nesmiselna. V splošni relativnosti je tako nesmiselno misliti o določenem razmiku med telesi. Napaka ima zgodovinsko konotacijo: rojena je v času Sovjetov, ko je bilo Rusom vse jasno!