POJEM “RELATIVNOST”, PROSTORNINA VESOLJA, NAčELO ENERGIJE IN LAGRANGEOVE GENERALIZIRANE ENAčBE

zf42

Kazalo

1. Pojem “relativnost”

Naj se točka giblje vzdolž osi x. Hitrost te točke v mirnem sistemu S je $\dot{x}$, v sistemu S’, ki se giblje s hitrostjo v, pa je njena hitrost

$$\dot{x}' = \dot{x} - v.$$

Vidimo: Galilejeva transformacija in vektorsko seštevanje hitrosti sta eno in isto.

Mirujoč sistem ima koordinati x in t (čas), sistem v gibanju pa x’ in t.

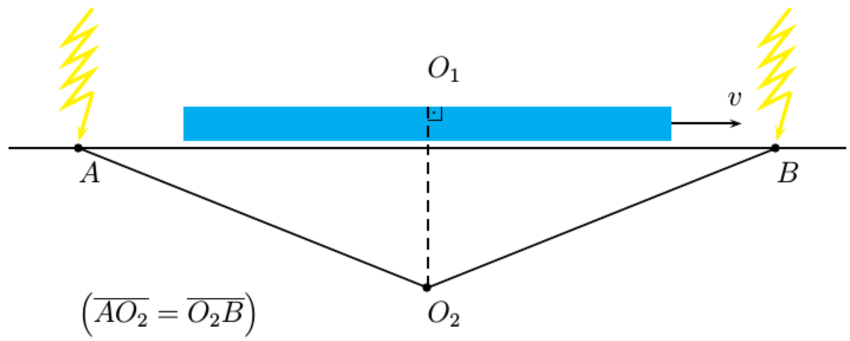
Velja:

$$x' = x - vt\,, y' = y\,, z' = z\, in t' = t\,.$$

Einstein je **podvomil** v resnico (= čas je absoluten $\Rightarrow t' = t$)! Zakaj?

Date: 26. januar 2021.

Zamislimo si vlak, ki se giblje s hitrostjo v, kot kaže slika 1.



Slika 1.

Dve streli zadaneta točki A in B **istočasno** za opazovalca v točki O_2 (mirujoči sistem), kar pa ni istočasno za opazovalca v točki O_1 (sistem v gibanju). Slednji dobi informacijo, da se je dogodek v točki B zgodil pred dogodkom v točki A. Sklep: **Istočasnost izgine kot posledica gibanja.** "Istočasno" v enem sistemu NI istočasno v drugem sistemu. Einstein zato ovrže misel o absolutnem času (t'=t). Kolikšno ceno pa plača? Avreolo (halo) absolutnosti prevzame **konstantnost svetlobne hitrosti**. V vsakem sistemu, neodvisno od stanja gibanja, je svetlobna hitrost **vselej eno in isto**. Torej: Gibajočemu in mirujočemu opazovalcu svetloba ubeži vedno z enako hitrostjo. Ali se tvoj duh temu upre? Ne! Vse kaže, da ti narava sporoči, da si norec, če ne spremeniš pravil igre z njo! Kaj pa bi sploh spremenil? **Prvič:** Svetloba ni proces nekega fizikalnega procesa v prostor-času. **Drugič:** Svetloba je neko obanašanje samega prostora-časa. In prav to je pogoj ohranitve matematične oblike vseh fizikalnih zakonov ne glede na izbiro koordinatnega sistema.

Torej: Galilejeve transformacije spreminjamo

$$x' = x - vt \rightarrow x' = k(x - vt) \tag{1}$$

$$x = x' + vt' \rightarrow x = k(x' + vt') \,, \tag{2}$$

pri čemer je k faktor spremembe. "Širjenje" svetlobe v enem sistemu določi enačba $x = ct$, v drugem pa $x' = ct'$. Kostanta c je torej, ne glede na sistem, eno in isto. Tako drži

$$\left.\begin{aligned} ct' &= k(ct - vt) \\ ct &= k(ct' + vt') \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad c^2tt' = k^2tt'(c^2 - v^2)\ ,$$

od koder sledi

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ .$$

V enačbo (2) vstavimo x' iz enačbe (1)

$$x = k\Big[k(x - vt) + vt'\Big] \quad \Rightarrow \quad t' = k\Big[t + \frac{x}{v}\Big(\frac{1}{k^2} - 1\Big)\Big]\ ,$$

tako dobimo Lorentzove transformacije:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

ali

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ . \tag{4}$$

Kaj nam vse to pove? V določenem trenutku imajo v mirujočem sistemu **različne točke v gibajočem sistemu različne informacije o času.** Iz enačb 3 vidimo: ura v gibajočem sistemu se mora pomikati nazaj ob gibanju naprej v smeri x. Absolutna istočasnost je izginila.

Posledice:

1.1. *Sprememba dolžine palice*

Oglejmo si palico dolžine l' v sistemu $S'(x', t')$. Njena začena koordinata naj bo x'_0 in končna $x'_0 + l'$. V sistemu S je ob času t palica med koordinatama x_0 in $x_0 + l$. Imamo

$$x'_0 = \frac{x_0 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x'_0 + l' = \frac{x_0 + l - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

od koder sledi

$$l = l'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{6}$$

Torej: Palica, ki se giblje s hitrostjo v, se zdi mirujočemu opazovalcu skrajšana za faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Vidimo tudi: Mirujoči opazovalec vzame dolžino za lastno istočasnost. Za gibajočega opazovalca, je mirujoči opazovalec vzel sprednjo točko palice v zgodnejšem času in si zato razlaga, zakaj se zdi mirujočemu opazovalcu palica "skrajšana".

1.2. *Sprememba "dolžine" časa*

Zastavimo si vprašanje: Kako "dolgo" traja proces, ki se dogaja v neki točki x'_0 sistema S', za mirujočega opazovalca? Vzemimo interval $t'_1 \to t'_2$, ki ima v mirujočem sistemu S vrednost

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (iz\ relacije\ (4))\,. \tag{7}$$

To pomeni: Ena sekunda v S' je "razširjena" za opazovalca v sistemu S. Torej: **Čas se v gibanju upočasni! Ura to potrdi!**

1.3. *Pojem "interval"*

Na trajektoriji gibanja svetlobe velja:

$$0 = dt^2c^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{8}$$

in to dejstvo sugerira: razmik med dogodkoma v strukturi prostor-čas (ko gre za objekt materije) je

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{9}$$

ali

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,, \tag{10}$$

kjer sta ds prostorski interval in $d\tau$ časovni interval. Razmiku ds pravimo **lastna razdalja**, časovnemu intervalu $d\tau$ pa **lastni čas**.

Bistvo je v naslednjem: interval ima ali prostorsko ali časovno naravo, koordinate pa so lahko imaginarne (če zamenjamo mesta seštevkov z desne).

Bistvo bistva pa je: INTERVAL JE INVARIANTA (ni odvisen od koordinatnega sistema).

To ponazorimo! Vzdolž osi x sta $y = 0$ in $z = 0$. Taka poenostavitev ne upliva na splošni sklep. Torej vzamimo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \tag{11}$$

in vstavimo diferenciale iz relacije (4). Dobimo

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2\gamma^2(dt' + \frac{v}{c^2}dx')^2 - \gamma^2(dx'^2 + 2v dx' dt' + v^2 dt'^2) = \\ &= \gamma^2 c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})dt'^2 - \gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2})dx'^2 = \\ &= c^2 dt'^2 - dx'^2\,, \end{aligned} \tag{12}$$

kjer je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{13}$$

Relaciji (11) in (12) soglašata:

1. Oblika intervala se po spremembi sistema ne spreminja

2. Vsak koordinatni sistem ima v posesti lastni prostor in lastni čas

3. Prostor in čas sta relativna, kraljica relativnosti pa je hitrost svetlobe

To je vsebina **posebne relativnostne teorije** (special theory of relativity).
Omejitev teorije: **materija je odsotna!**
Posplošitev teorije: **materija je prisotna!**

Kaj prinese posplošitev?

1. Vsaka točka ima v posesti lastni prostor in lasten čas

2. Enačbe fizikalnega polja

$$\begin{pmatrix} \text{LASTNOST} \\ \text{PROSTOR-ČASA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ENERGIJA-IMPULZ} \\ \text{MATERIJE} \end{pmatrix} \tag{14}$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$GEOMETRIJA \qquad\qquad\qquad FIZIKA$$

povedo: fizika sporoči geometriji kako naj se zakrivlja in krivina prostor - časa sporoči materiji kako naj se obnaša.
V tem je vsebina **splošne relativnostne teorije** (general theory of relativity).

Metrika prostor-časa je tokrat v najbolj splošni obliki

$$ds^2(x) = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}(x)dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta \,, \tag{15}$$

kjer je $x \equiv x^0, x^1, x^2, x^3,\ \alpha, \beta = 1, 2, 3$. Splošna relativnostna teorija največ doseže z ortogonalno metriko v kateri je

$$g_{0\alpha} = 0 \,. \tag{16}$$

Takrat metriko dolči oblika

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dk^k \,, \tag{17}$$

kjer sta $i, k = 0, 1, 2, 3$.

Teoretična kozmologija začne z ortogonalno metriko v sferičnih koordinatah

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r,t)} dt^2 - \left\{ e^{\mu(r,t)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\phi^2) \right\} \tag{18}$$

in postavi pogoja $\nu = 0$ in $\mu = \mu(r)$, ki spremljata kozmični čas na sferi $r = const.$ **prasevanja** (background radiation). Tako nas s pomočjo enačbe (14) pripelje do oblike, ki ji rečemo **Robertson-Walkerjeva** metrika

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{d\sigma^2 + \sigma^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{\left[(1 + \frac{k}{4})\sigma^2 \right]^2} \right\} , \tag{19}$$

kjer je $\sigma = \frac{r}{r_0}$, pri čemer je $r = r_0$ začetna vrednost ekspanzirajoče koordinate.

Dejstvo, da **tukaj** o osnovni enačbi (14) **ne vemo nič**, nas **ne moti**, kajti naš cilj je **prostornina hipersfere vesolja** in prostorninski delež metrike iz (19) **smo usposobljeni** doseči. Torej! Nadaljujmo naprej iz tistega kar smo izvedeli!

2. Prostornina vesolja

Vesolje se začne v singularnosti (ni končna), če je faktor skale širjenja R(t) neka sinusna funkcija strukture ξ; $t(\xi)$:

$$R(t(\xi = 0)) = 0, \qquad R(t(\xi = \pi)) = 0 \, . \tag{20}$$

Tako končnost prostora zagotovita pogoja:

(i) koordinata σ se giblje med 0 in ∞;
(ii) hipersferični kot y se giblje med 0 in π,

ki sta združena v relacijah

$$\sigma = \tan\frac{y}{2}, \qquad \sin y \frac{\sigma}{1 + \frac{\sigma^2}{4}}, \qquad dy^2 = \frac{d\sigma^2}{(1 + \frac{\sigma^2}{4})^2} \, . \tag{21}$$

Kaj se nam obeta?

Interval (9) lahko zapišemo v obliki

$$ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \tag{22}$$

$$= \zeta_{00} c^2 dt^2 + \zeta_{11} dx^2 + \zeta_{22} dy^2 + \zeta_{33} dz^2 \ ,$$

kjer je

$$\zeta_{00} = 1, \qquad \zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{33} = -1 \tag{23}$$

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = \imath x, \qquad x^2 = \imath y, \qquad x^3 = \imath z \tag{24}$$

oziroma

$$\overleftrightarrow{\zeta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1\ . \end{pmatrix} \tag{25}$$

Pojdimo naprej. Če matrika (25) vsili hipersferi koordinate (24), potem drži še

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2 \tag{26}$$

oziroma

$$x^0 dx^0 + x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^2 dx^3 = 0\ . \tag{27}$$

Eliminacijam dx^0 v (22) sledi

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2 + \frac{\left[d \sum\limits_{i=1}^{3} (x^i)^2 \right]^2}{4(x^0)^2}\ . \tag{28}$$

Sferične koordinate iz transforrmacij

$$x^1 = \rho \cos\varphi \sin\theta, \qquad x^2 = \rho \sin\varphi \sin\theta, \qquad x^3 = \rho \cos\theta \tag{29}$$

to prevajajo v obliko

$$ds^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 d\varphi^2)\,, \tag{30}$$

kjer smo si pomagali z relacjo

$$(x^0)^2 = R^2 - \rho^2\,. \tag{31}$$

Do popolnega presenečenja pride po koordinatni substituciji

$$\rho = \frac{\sigma R}{1 + \frac{1}{4}\sigma^2}\,, \tag{32}$$

ko metrika (30) zavzame obliko

$$1 = 1? \tag{33}$$

$$ds^2 = R^2 \left\{ \frac{d\sigma^2 + \sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{(1 + \frac{1}{4}\sigma^2)^2} \right\} \tag{34}$$

v popolnem soglasju s prostorsko obliko Robertson-Walkerjeve metrike (19) za krivino $k = 1$, ki pomeni zaprti prostor v še enem soglasju s pogoji (21), nakar drži

$$ds^2 = R^2 \left\{ dy^2 + \sin^2 y(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right\}\,. \tag{35}$$

Sedaj se pojavi problem: Kaj je prostornina (po tej metriki) tako zaprtega prostora? Ali je to res prostornina vesolja?

$\Im \quad \spadesuit \quad \Im$

Preden odgovorimo, še malo matematike!

$\Im \quad \spadesuit \quad \Im$

Oglejmo si spremembo koordinat x^i v $\bar{x}^i$. Metrični tenzor g_{ik} se pri tem transformira po zakonu

$$\bar{g}_{ik} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} g_{\alpha\beta} \, . \tag{36}$$

Posledično se, po uporabi pravila za produkt matrik, determinanta g transformira kot

$$\bar{g} = g \left(det \, \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^i} \right)^2 \tag{37}$$

ali

$$\sqrt{-\bar{g}} = \sqrt{-g} \left| \frac{\partial(x^1, x^2, \cdots)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots)} \right| \, , \tag{38}$$

zaradi izbire pozitivne vrednosti kvadratnega korena. Diferencial elementa prostornine se potem transformira kot

$$d\overline{V} = \left| \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots)}{\partial(x^1, x^2, \cdots)} \right| \, dV \, , \tag{39}$$

iz česar izhaja

$$\sqrt{|g|} \, dy \, d\theta \, d\varphi = R^3 \sin^2 y \, dy \, d\theta \, d\varphi \, . \tag{40}$$

Odtod sledi prostornina sfere, ki se širi od $y = 0$ do y_0,

$$V(y_0) = 4\pi R^3 \int\limits_0^{y_0} sin^2 y \, dy =$$

$$= 4\pi R^3 \frac{2y_0 - \sin 2y_0}{4} \tag{41}$$

ali

$$V(\pi) = 2\pi^2 R^3 \; , \tag{42}$$

kar je prostornina zaprtega vesolja: kot hipersfera je takšno vesolje **končno**, čeprav **brez mej**.

Intuitivno spoznanje ima za vsebino vedno neko preprostost. Poskus to potrdi ali zavrže. Če potrdi, potem odpira možnost: posplošitev preprostega se prelevi v poglobitev, ki spelje dvig intuitivnega na raven racionalnega spoznanja. Šele takrat je resnična vrednost v naši lasti.

Kaj štejemo kot vsebinsko preprostost? Gibanje, stanje ali energija so na začetku pod kontrolo elementarnega opazovanja. V nazornost opisa vpeljemo pojem “koordinat”. Kaj je potem poseg “posplošitev”? Lahko si mislimo:

(i) pojem “transformacija” se zaplete, ko namesto “ravnega” vpeljemo “ukrivljeno”;
(ii) pojem “razsežnost” se spremeni, ko predstavljivost dimenzij zamenjamo s poljubnim številom dimenzij;
...

3. Načelo energije

Gravitacijska sila nam je znana:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \; ; \qquad m_1, m_2 = masi \; . \tag{43}$$

Po Coulombu ohranita električna in magnetna sila obliko:

$$F = \frac{e_1 e_2}{r}\,; \qquad e_1, e_2 = \text{električna naboja} \tag{44}$$

ali v vektorski obliki

$$\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{45}$$

oziroma po komponentah

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{e_1 e_2}{r^2}\frac{x}{r} \\ F_y &= \frac{e_1 e_2}{r^2}\frac{y}{r} \\ F_z &= \frac{e_1 e_2}{r^2}\frac{z}{r}\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Vpeljemo skalarni funkciji

$$\varphi = \frac{e_1 e_2}{r}\,, \qquad r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{47}$$

in zlahka preverimo

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,. \end{aligned} \tag{48}$$

Zlahka preverimo, da velja enako tudi za **elastično silo** prostorsko harmoničnega oscilatorja. Tukajle vpeljemo skalarno funkcijo

$$\varphi = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \tag{49}$$

in dobimo

$$F_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -kx$$

$$F_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -ky \tag{50}$$

$$F_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -kz\ .$$

Zdaj dokažemo, da se funkcija φ ujema s potencialno energijo. Izhajamo iz dela A (iz nemščine "Arbeit"), ki je skalarni produkt sile $\vec{F}$ in vektorja $d\vec{r}$ premika iz točke P_1 v točko P_2:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \tag{51}$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{52}$$

ali

$$A = -\int\limits_{P_1}^{P_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \tag{53}$$

$$= \int\limits_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right)\ , \tag{54}$$

kjer je

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \tag{55}$$

totalni diferencial funkcije φ. Delo je odtod

$$A = \int_{P_1}^{P_2} d\varphi = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) \tag{56}$$

določeno kot **razlika potencialnih energij**.

Za sile, ki se lahko izpeljejo iz skalarne funkcije drži **načelo energije**. Enačbe gibanja za **delec mase m** so:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ . \end{aligned} \tag{57}$$

Enačbe po vrsti zmnožimo z $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ in $\frac{dz}{dt}$, nato jih seštejemo in dobimo

$$m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \tag{58}$$

$$= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) \tag{59}$$

in zapišemo

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = -\frac{d\varphi}{dt} \tag{60}$$

oziroma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \varphi\right) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \varphi = \ konstantanta\ ,$$

kjer je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \text{ kinetična energija}$$

$$E_p = \varphi = \text{ potencialna energija} .$$

Sklep:

$$E = E_k + E_p = \textbf{ konstanta ohranitve energije}$$

4. Lagrangeove generalizirane enačbe

Vpeljemo splošne koordinate $q = (q_1, q_2, q_3)$, ki jih vrinemo v sistem enačb (57). Za te koordinate velja: prejšnje koordinate $x,\ y,\ z$ so funkcije "novih" koordinat $q_1,\ q_2,\ q_3$. Torej! Zapišemo

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \qquad y = y(q_1, q_2, q_3), \qquad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

in si zapomnimo: vsaki točki s koordinatami x, y, z vsilimo tri splošne koordinate $q_1,\ q_2,\ q_3$. Odtod se vsako gibanje z lahkoto predstavi s pomočjo treh funkcij

$$q_1(t), \quad q_2(t), \quad q_3(t) .$$

Komponente hitrosti $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ lahko sedaj zapišemo s pomočjo odvodov $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \frac{dq_3}{dt}$!

To zapišemo

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}
\end{aligned} \tag{61}$$

Enačbe sistema (57) sedaj po vrsti zmnožimo zdaj z $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q_1}$ in $\frac{\partial z}{\partial q_1}$, nakar jih seštejemo in dobimo

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) =$$

$$= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1} =$$

$$= -\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\,.$$

Ostane nam še preoblikovanje prvega člena

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)$$

$$-m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial q_1}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial q_1}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial q_1}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dq_1}{dt}\right)}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dq_1}{dt}\right)}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dq_1}{dt}\right)}\right)$$

$$-m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial q_1}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial q_1}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial q_1}\right)\ ,$$

kjer nam je sistem (61) omogičil relacije

$$\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dq_1}{dt}\right)}=\frac{\partial x}{\partial q_1}\ ,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dq_1}{dt}\right)}=\frac{\partial y}{\partial q_1}\ ,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dq_1}{dt}\right)}=\frac{\partial z}{\partial q_1}\ .$$

Z druge strani nas izraz za kinetično energijo

$$E_k=\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$

pripelje do relacij

$$\frac{\partial E_k}{\partial\left(\frac{dq_1}{dt}\right)} = m\left\{\frac{dx}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dq_1}{dt}\right)} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dq_1}{dt}\right)} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial\left(\frac{dq_1}{dt}\right)}\right\}$$

in

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_1} = m\left\{\frac{dx}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial q_1} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial q_1} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial q_1}\right\}$$

s katerima lahko začetno relacijo zapišemo v obliki

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial\left(\frac{dq_k}{dt}\right)} - \frac{\partial E_k}{\partial q_k} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, 3\,.$$

Vpeljimo še Lagrangeovo funkcijo

$$L = E_k - \varphi$$

in dobimo generalizirane Lagrangeove enačbe

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dq_k}{dt}\right)} = \frac{\partial L}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, 3\,.$$

Zdaj se vrnemo k začetnemu vprašanju: ali posplošitev (po poglobitvi) vsebuje začetno preprostost?

Vzemimo Descartesove koordinate in preverimo!

$$q_1 = x, \qquad q_2 = y, \qquad q_3 = z$$

Odvajamo po x in $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\partial}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = m\frac{dx}{dt}$$

Lagrangeove enačbe postanejo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)} - \frac{\partial E_k}{\partial x} = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

s čemer potrdimo: da! Newton je imel prav! Zares. Vse "štima", kakor se spodobi!