ELEMENTI FIZIKALNEGA POLJA

zf42

Kazalo

Fizikalno polje je prizorišče fizikalnih dogajanj v prostoru in času: je oder fizike. Misel nas vedno zlahka popelje bodisi do nekega skalarja, bodisi do nekega vektorja. V najbolj preprostem primeru sta skalar f in vektor $\vec{v}$ funkciji krajevnega vektorja $\vec{r}$:

$$\textit{skalar} \;\; f = f(\vec{r}) \tag{1}$$

$$\textit{vektor} \;\; \vec{v} = \vec{v}(\vec{r})\,. \tag{2}$$

Date: 5. oktober 2014.

V primeru, ko f in $\vec{v}$ nista odvisna od časa t, govorimo o **stacionarnem ali konstantnem polju.** Če pa ugotovimo obstoj funkcij

$$f = f(\vec{r}, t) \tag{3}$$

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)\,, \tag{4}$$

govorimo o **nestacionarnem ali spremenljivem polju.** Funkciji $f(\vec{r}, t)$ in $\vec{v}(\vec{r}, t)$ sta enoznačni, zvezni in diferenciabilni hrati po vektorju $\vec{r}$ in skalarju t.

1. Pojem gradient

Vektor, ki ima v poljubni točki skalarnega polja smer najhitreje naraščujočega skalarja f, magnitudo pa enako prirastku skalarja f v tej smeri vzdolž neskončno majhne (infinitezimalne) dolžine, imenujemo **gradient** skalarja f. Običajno zapišemo

$$\vec{G} = grad\ f \tag{5}$$

in poudarimo: gradient **ni odvisen** od koordinatnega sistema. Gradient je **invarianta** polja.

Točka A se nahaja na površini $f(\vec{r}) = C$ in

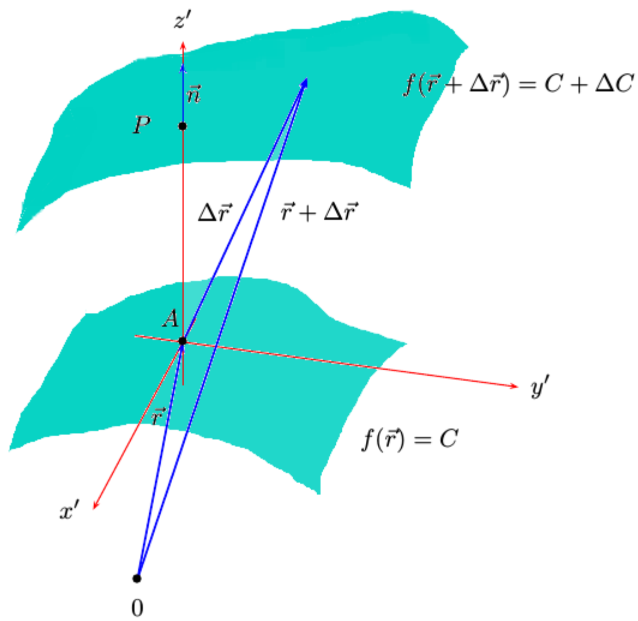
$$\overline{AP} = \Delta n \tag{6}$$

je odsek normale $\vec{n}$ iz A na površino $f(\vec{r} + \Delta\vec{r})$. Hitrost naraščanja skalarne funkcije f je

$$\frac{\Delta C}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - f(\vec{r})}{|\Delta\vec{r}|}\,. \tag{7}$$

Maksimalna vrednost nastopi v primeru, ko je $\Delta\vec{r}$ vzporedna z normalo $\vec{n}$ in je magnituda Δn. Odtod sledi

$$\vec{G} = \frac{df}{dn}\vec{n}\,. \tag{8}$$



Slika 1.

Dve osi (x', y') sistema S' (izhodišče se nahaja v točki A) sta pri tem v tangenti ravnini površine $f(\vec{r}) = C$, kar pomeni

$$(grad\, f)_{x'} = 0$$

$$(grad\, f)_{y'} = 0 \tag{9}$$

$$(grad\, f)_{z'} = \frac{df}{dn}\,.$$

Pri tem je

$$|\Delta\vec{r}| = \frac{|\Delta\vec{n}|}{\cos\left(\vec{n},\vec{l}\right)}\,, \tag{10}$$

kjer je $\vec{l}$ vektor vzdolž $\Delta\vec{r}$. Isto velja za diferencialo

$$dx = \frac{dn}{\cos\left(\vec{n}, \vec{i}\right)} = \frac{dn}{\cos\left(\vec{n}, x\right)} \, , \tag{11}$$

kjer je $\vec{i}$ enotni vektor osi x. Prirastek skalarja f na enoto dolžine v smeri $\vec{l}$ je zdaj očitno

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial n} \cos\left(\vec{n}, \vec{l}\right) \tag{12}$$

$$\frac{df}{dl} = \frac{df}{dn} \cos\left(\vec{n}, \vec{l}\right) \tag{13}$$

oziroma

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial n} \cos\left(z', x\right) &= \frac{\partial f}{\partial n} \cos\left(\vec{n}, x\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial n} \cos\left(\vec{n}, y\right) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial n} \cos\left(\vec{n}, z\right) . \end{aligned} \tag{14}$$

Komponente vektorja $\vec{G}$ zdaj lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} G_x &= (grad\, f)_x = (grad\, f)_{x'} \cos(z', x) \\ G_y &= (grad\, f)_y = (grad\, f)_{y'} \cos(z', y) \\ G_z &= (grad\, f)_z = (grad\, f)_{z'} \cos(z', z) \end{aligned} \tag{15}$$

oziroma

$$G_x = (grad\, f)_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$G_y = (grad\, f)_y = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{16}$$

$$G_z = (grad\, f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

ali

$$\vec{G} = grad\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \tag{17}$$

oziroma

$$\vec{G} = \nabla f = grad\, f \ \ , \tag{18}$$

kjer je ∇ (nabla) operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\, , \tag{19}$$

ki deluje na skalarno funkcijo f.

Opomba! Izraz (17) lahko sledi iz izraza (8), če vzamemo totalni diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{20}$$

in potrdimo

$$\vec{G} = \frac{df}{dn}\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dn}\vec{n} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dn}\vec{n} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dn}\vec{n}\, . \tag{21}$$

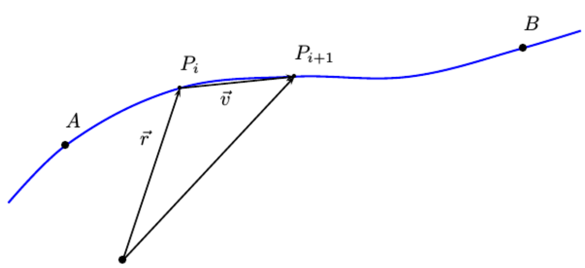
Opomba! Fizika je posebej pozorna: Kaj je vektor, ki je gradient nekega skalarja? Če obstaja, ga imenujemo **potencialni vektor**, njegovo polje pa imenujemo **potencialno polje**.

Torej! Če drži

$$\vec{G} = grad\,\varphi = \nabla\varphi\,, \tag{22}$$

potem je $\vec{G}$ **potencialni vektor**, φ **pa potencial**!

Krivuljni integral vektorja (slika 2) $\vec{v}$ med točkama A in B je mejna vrednost vsote



Slika 2.

skalarnih produktov vektorja $\vec{v_i}$ in elementov Δs_i, ko gre število teh produktov (n) v neskončno, velikost elementov pa gre proti nuli:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v_i \Delta s_i = \int_A^B \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{v}\cdot d\vec{r}\,. \tag{23}$$

Ta integral je nasploh odvisen od poti med točkama A in B, **ni pa od poti odvisen**, če je podintegralski izraz **totalni diferencial**. Takrat lahko zapišemo

$$\int_A^B \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A\,. \tag{24}$$

Torej! Če namesto vektorja $\vec{v}$, vzamemo potencialni vektor $\vec{G}$, dobimo

$$\int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_A^B grad\,\varphi \cdot d\vec{r} = \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\vec{r} \tag{25}$$

in zlahka se prepričamo, da je podintegralski izraz prav totalni diferencial

$$\int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A\,. \tag{26}$$

Torej! Cirkulacija potencialnega vektorja vzdolž zaprte poti je enaka nič:

$$\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r} = 0\,. \tag{27}$$

Drži tudi obratno: **Če je krivuljni integral nekega vektorja vzdolž neke zaprte poti enak nič, potem je ta vektor gradient nekega skalarja.**

Primer: Naj bo $\vec{G}$ sila $\vec{F}$. Potem velja

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = A_2 - A_1 \tag{28}$$

oziroma

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{29}$$

in sklepamo: Delo sile v potencialnem polju med dvema poljubnima točkama ni odvisno od oblike poti, ampak le od njune lege. Delo sile potencialnega polja na sklejeni poti je enako nič. Takšni sili pravimo **konzervativna sila**. Torej: **konzervativna sila je gradient nekakšne funckije**.

2. Pretok vektorja (Flux)

Količino $d\phi$ imenujemo elementarni pretok vektorja $\vec{v}$ skozi element površine $d\vec{S}$:

$$d\phi = \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \vec{v} \cdot d\vec{S} \, . \tag{30}$$

Celoten pretok (flux) je potem površinski integral

$$\phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \, , \tag{31}$$

ki se lahko zapiše kot dvojni integral podintegralske funkcije:

$$\phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \tag{32}$$

$$= \iint_S \{ v_x \cos(\vec{n}, x) + v_y \cos(\vec{n}, y) + v_z \cos(\vec{n}, z) \} \, dS \, . \tag{33}$$

3. Pojem divergenca

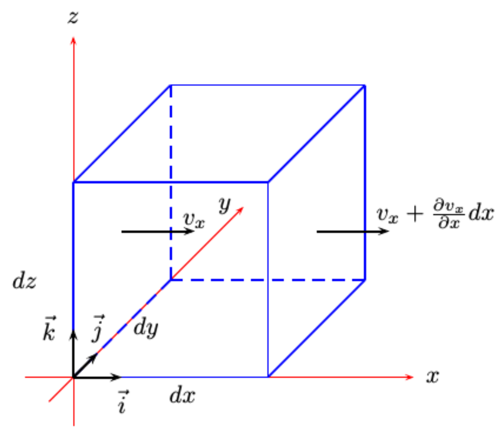
Divergenca je merilo za moč izvirnosti fizikalnega polja. Izberemo ga kot mejno vrednost kvocienta pretoka fizikalnega polja skozi zaključeno ploskev in prostornine ΔV v tej ploskvi

$$div \, \vec{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \vec{v} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \, . \tag{34}$$

Poiščimo sedaj analitični izraz za divergenco! Vzemimo paralelopiped (glej sliko 3).

Vhodni flux (pretok) obravnavamo kot **negativen**, **izhodni** pa kot **pozitiven**. Naj bo $d\phi_1$ pretok skozi ploskev dydz, ki se nahaja v ravnini y0z. Zapišemo

$$d\phi_1 = -v_x dydz \, . \tag{35}$$



Slika 3.

Pretok skozi vzporedno ploskev na razdalji dx zapišemo v obliki

$$d\phi_2 = \Big(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx\Big)dydz\,. \tag{36}$$

Tako dobimo

$$d\phi_1 + d\phi_2 = \frac{\partial v_x}{\partial x}dxdydz\,. \tag{37}$$

Analogno dobimo pretoka skozi $dxdz(=\frac{\partial v_y}{\partial y}dxdydz)$ in $dxdy(=\frac{\partial v_z}{\partial z}dxdydz)$. S seštevanjem dobimo pretok

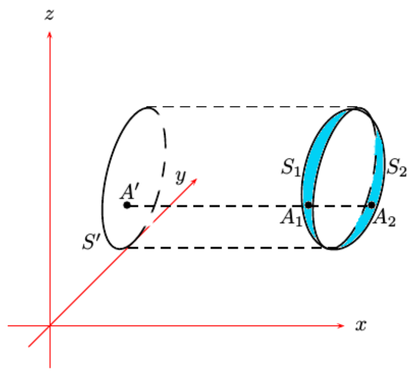
$$d\phi = \Big(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Big)dxdydz \tag{38}$$

oziroma

$$\frac{d\phi}{dV} = div\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{v}\,. \tag{39}$$

4. Gaussov izrek

Oglejmo si spodnjo skico (slika 4).



Slika 4.

Zastavimo si nalogo: Matematiki se mora (ne glede na fizikalni pomen naloge) posrečiti postopek prehoda iz trojnega integrala (po prostornini V) na dvojni integral (po površini, ki objema to prostornino)!

Naj bo P(x,y,z) poljubna zvezna funkcija v vsaki točki prostornine V, ki jo objema površina S. Oglejmo si integral

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz \, ,$$

ki ga je potrebno preleviti v dvojni (površinski) integral. Lahko ga zapišemo v obliki

$$\iint\limits_S dydz \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial P}{\partial x} dx \, ,$$

kjer sta x_1 in x_2 abscisi točk A_1 in A_2 v katerih premica $A'A_1A_2$, ki je vzporedna z x osjo, prodira skozi ploskev S, dvojni integral pa vzamemo po projekciji S' konture na ravnini y0z.

Z integriranjem po x dobimo

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial P}{\partial x} dx = P(x_2, y, z) - P(x_1, y, z) \, ,$$

po zamenjavi pa dobimo

$$\iint\limits_{S'} dydz \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial P}{\partial x} dx = \iint\limits_{S'} P(x_2, y, z) dydz - \iint\limits_{S'} P(x_1, y, z) dydz \, .$$

Izračun najprej poteka po površini S'. Nas pa zanima integracija po površini $S = S_1 + S_2$. S' je projekcija S_2 na ravnino y0z, zato sledi

$$\iint\limits_{S'} P(x_2, y, z) dydz = \iint\limits_{S_2} P dydz \, .$$

Podobno lahko namesto integrala po površini S' za funkcijo $P(x_1, y, z)$ vzamemo integral po površini S_1, toda z notranje strani glede na prostornino V. Zanima nas integral po tej površini, vendar z zunanje strani, ta integral pa je enak drugemu seštevku zgornje relacije s spremenjenim predznakom.
Tako dobimo

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{S_1} P dydz + \iint\limits_{S_2} P dydz = \iint\limits_{S} P dydz \, .$$

Če sta podani še dve funkciji $Q(x, y, z)$ in $R(x, y, z)$, analogno sledi

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{S} Q dxdz$$

in

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{S} R dxdy \, .$$

S seštevanjem dobimo

$$\iiint\limits_{V} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \Big) dxdydz = \iint\limits_{S} \Big(P dydz + Q dzdx + R dxdy \Big) \, .$$

Če v zgornji izraz vstavimo $P = v_x$, $Q = v_y$ in $R = v_z$, lahko zapišemo

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S \left(v_x dydz + v_y dzdx + v_z dxdy\right)$$

ali

$$\iiint\limits_V div\, \vec{v}\, dV = \iint\limits_S \vec{v} \cdot d\vec{S}\,,$$

kar je dokončna oblika Gaussovega izreka.

5. Pojem rotor

Pojem "divergenca" nam je ponazoril obstoj diferencialne operacije, ki nas je iz vektorskega polja pripeljala do skalarnega polja in potrdila možnost njegove eksistence. Zdaj pa vprašajmo: Ali obstaja diferencialna operacija, ki nas iz enega vektorskega polja pripelje do drugega vektorskega polja? Zlahka ugotovimo: Problem reši pojem **rotor**.

Oglejmo si zaprto krivuljo s, ki objema poljubno površino S. Vzemimo potem krivuljni integral $\oint \vec{v} \cdot d\vec{s}$ vzdolž zaprte krivulje s. Če ta integral delimo s S

$$\frac{\oint \vec{v} \cdot d\vec{s}}{S}$$

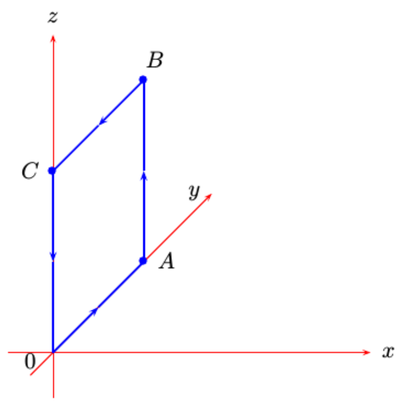
in poiščemo mejno vrednost (ko površina S postaja neskončno majhna), dobimo normalno komponento ($\vec{n}$ je pozitivna normalna na površino) nekega vektorja

$$|\vec{R}_n| = \lim_{S \to 0} \frac{\oint \vec{v} \cdot d\vec{s}}{S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \vec{v} \cdot d\vec{s}}{\Delta S}\,,$$

ki ga imenujemo **rotor vektorja**.

Poiščimo še analitični izraz za ta vektor "rotor"! Vzemimo elementarno površino $dS_x = dydz$ v ravnini y0z, ki zapira konturo 0ABC0 na sliki 5.

Zanima nas intergral $\oint v_s ds$. Na poti 0A imamo $v_y dy$ za podintegralski izraz. Vzdolž poti AB, komponenta vektorja $\vec{v}$ ni več v_z (kot po



SLIKA 5.

poti 0C): po enoti dolžine v_z se spremeni za $\frac{\partial v_z}{\partial y}$, na dolžini dy pa je sprememba $\frac{\partial v_z}{\partial y} dy$. Torej: vzdolž AB imamo podintegralski izraz

$$\Big(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy\Big) dz ,$$

vzdolž poti BC pa

$$-\Big(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz\Big) dy ,$$

kjer je predznak minus posledica cirkulacije proti smeri naraščanja koordinate y. Končno je podintegralski izraz vzdolž poti C0 enak $-v_z dz$. Po seštevanju vseh izrazov pa sledi:

$$\oint_{(dydz)} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Big(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big) dydz = \Big(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big) dS_x .$$

Analogno dobimo

$$\oint_{(dzdx)} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Big(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big) dzdx = \Big(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big) dS_y$$

in

$$\oint_{(dxdy)} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \Big(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big)dxdy = \Big(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big)dS_z\,.$$

Torej: komponente vektorja rot $\vec{v}$ so:

$$(rot\,\vec{v})_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\,,$$

$$(rot\,\vec{v})_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\,,$$

$$(rot\,\vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\,.$$

Enako velja:

$$rot\,\vec{v} = \Big(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big)\vec{j} + \Big(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big)\vec{k}$$

ali

$$rot\,\vec{v} = \nabla\times\vec{v} = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\Big)\times(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}\,.$$

6. Diferencialne operacije drugega reda

Operacije grad, div, rot in $(\vec{v}\cdot\nabla)$ imenujemo diferencialne operacije prvega reda. Iz **medsebojnih operacij** sledijo diferencijalne operacije **drugega reda**.

6.1. *Divergenca gradienta*

Naj bo φ skalar. Prejšnji pojmi zdaj omogočajo izračun

$$div\, grad\, \varphi = div\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

ali

$$div\, grad\, \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi=$$

$$=\nabla^2\varphi=\Delta\varphi\,,$$

kjer je pisavo

$$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\Delta$$

vpeljal Lamé.

6.2. *Gradient divergence*

Naj bo $\vec{v}$ vektor. Izberimo si simbolično pisavo!

$$grad\, div\, \vec{v} = \nabla(\nabla\cdot\vec{v})=$$

$$=\nabla\times(\nabla\times\vec{v})+\nabla^2\vec{v}$$

ali

$$grad\, div\, \vec{v} = rot\, rot\, \vec{v} + \nabla^2 \vec{v}\,.$$

Sicer velja

$$\nabla^2 = \vec{i}\cdot\vec{i}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \vec{i}\cdot\vec{j}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \vec{i}\cdot\vec{k}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + \vec{j}\cdot\vec{i}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} +$$

$$+\vec{j}\cdot\vec{j}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \vec{j}\cdot\vec{k}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + \vec{k}\cdot\vec{i}\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} + \vec{k}\cdot\vec{j}\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}$$

$$+\vec{k}\cdot\vec{k}\frac{\partial^2}{\partial x^z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta\,.$$

6.3. *Rotor gradienta*

$$rot\, grad\, \varphi = rot\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\Big) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\Big) + \cdots =$$

$$= 0$$

Simbolično sledi takoj

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = (\nabla\times\nabla)\varphi = 0\,.$$

6.4. *Divergenca rotorja*

$$div\ rot\ \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(rot\ \vec{v})_x + \frac{\partial}{\partial y}(rot\ \vec{v})_y + \frac{\partial}{\partial z}(rot\ \vec{v})_v =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big) =$$

$$= 0 \Leftarrow div\ rot\ \vec{v} = 0$$

Simbolično sledi takoj: $\nabla(\nabla \times \vec{v}) = (\nabla \times \nabla)\vec{v} = 0$.

6.5. *Rotor rotorja*

$$rot\ rot\ \vec{v} = rot\Big\{\Big(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big)\vec{j} + \Big(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big)\vec{k}\Big\}$$

ali

$$(rot\,rot\,\vec{v})_x = \frac{\partial}{\partial y}(rot\vec{v})_z - \frac{\partial}{\partial z}(rot\vec{v})_y =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big) =$$

$$= \Big(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}\Big) - \Big(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\Big) =$$

$$= \Big(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}\Big) - \Big(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\Big) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Big) - \Delta v_x =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} div\,\vec{v} - \nabla^2 v_x$$

Analogno sledi:

$$(rot\,rot\,\vec{v})_y = \frac{\partial}{\partial y} div\,\vec{v} - \nabla^2 v_y$$

in

$$(rot\,rot\,\vec{v})_z = \frac{\partial}{\partial z} div\,\vec{v} - \nabla^2 v_z\,.$$

Tako na koncu dobimo

$$rot\,rot\,\vec{v} = grad\,div\,\vec{v} - \nabla^2 \vec{v}\,.$$

Postopek pokaže, da je analitična predstavitev nevšečna, simbolična pa je preprosta:

$$rot\,rot\,\vec{v} = \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}\,.$$

7. Klasifikacija vektorskih polj

7.1. *Potencialno (nevrtinčasto) polje*

$rot\,\vec{v} = 0$, povsod

$div\,\vec{v} \neq 0$, vsaj v nekaterih točkah

7.2. *Solenoidno (brezizvirno) polje*

$div\,\vec{v} = 0$, povsod

$rot\,\vec{v} \neq 0$, vsaj v nekaterih točkah

7.3. *Laplaceovo polje*

$rot\,\vec{v} = 0$, povsod

$div\,\vec{v} = 0$, povsod

7.4. *Splošno polje*

$rot\,\vec{v} \neq 0$, vsaj v nekaterih točkah

$div\,\vec{v} \neq 0$, vsaj v nekaterih točkah

8. Klasična teorija gravitacijskega polja

Energija gravitacijske interakcije med dvema točkastima masama na razdalji r_{12} je natanko določena z relacijo

$$U_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \, .$$

Do tega pripelje Newtonov zakon. Eksperiment potrdi obstoj gravitacijske sile drugega telesa na prvo telo:

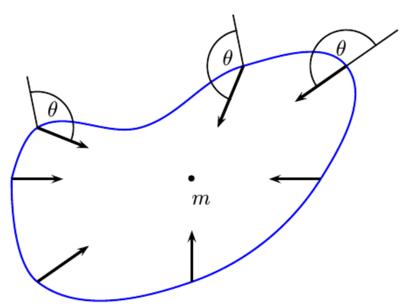
$$\vec{F}_{12} = -\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \, G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \, .$$

Po drugem Newtonovem zakonu je pospešek telesa enak

$$\vec{a}_1 = \vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = -\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\, G\frac{m_2}{r_{12}^2}$$

ob ugotovitvi: velikost pospeška ni odvisna od mase m_1.

Naj se zdaj točkasta masa m nahaja v prostornini zaprte ploskve, kot kaže slika (slika 6).



Slika 6.

Izračunajmo pretok polja $\vec{g}$ skozi površino S. Zapišemo

$$\phi = \int_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = \int g\cos\theta\, dS\ ,$$

kjer je θ kot med $\vec{g}$ in normalo $\vec{n}$ na S. Vsak element dS “vidimo” pod prostorskim kotom

$$d\Omega = \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}dS}{r^3} = \frac{\cos\theta\, dS}{r^2}$$

in pretok lahko zapišemo v obliki

$$\int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -\int_S G\,\frac{m}{r^2}\cos\theta\, dS =$$

$$= -\int_S G\,\frac{m\cos\theta\, r^2}{r^2\cos\theta} d\Omega =$$

$$= -4\pi G m\ ,$$

kjer smo vstavili

$$\vec{g} = -\frac{\vec{r}}{r} G\,\frac{m}{r^2}$$

in

$$\Omega = \iint_S \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}\, dS}{r^3} = \iint_S \frac{\cos\theta\, dS}{r^2} = 4\pi\ .$$

V primeru več mas $m_1, m_2, m_3, \cdots$, nastane polje $\vec{g}$ s superpozicijami polj $\vec{g_1},\ \vec{g_2},\ \vec{g_3}, \cdots$

$$\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} + \vec{g_3} + \cdots\ ,$$

pretok pa je takrat

$$\int_S \vec{g}\cdot\ dS = -4\pi G M\ ,$$

kjer je

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots\ .$$

Lahko pa se prepričamo, da mase zunaj zaprte površine ne prispevajo prav nič k pretoku polja. K pretoku polja namreč prispevajo le mase znotraj površine. O vsem tukaj odloča Gaussov izrek. Naj bo S sfera polmera r znotraj sferne plasti. Tam je $4\pi g r^2 = 0$, kot da znotraj S sploh ni mase. Odtod sledi $g = 0$. Če pa sferno-simetrično konfiguracijo mas M zapre površina S, je $g \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G$ in $g = -\frac{GM}{r^2}$.

Sklepamo naprej iz integralske oblike

$$\iint\limits_{S} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{V} div\, \vec{g}\, dV =$$

$$= -4\pi G \iiint\limits_{V} \rho\, dV$$

in dobimo diferencialno obliko Gaussovega gravitacijskega zakona

$$div\, \vec{g} = -4\pi G\rho\,.$$

Dejstvo, da je "gravitacijsko polje potencialno polje" nam dovoli pogoj

$$\vec{g} = -grad\, \varphi\,.$$

Ker je gravitacijsko polje konzervativno

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \int (\nabla \times \vec{g}) \cdot d\vec{S} = 0$$

dobimo

$$div\, \vec{g} = -div\, grad\, \varphi = -\nabla^2 \varphi = -4\pi G\rho$$

oziroma

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho\,,$$

kar je osrednja enačba v teoriji gravitacije - **Poissonova enačba**.

Opomba! V literaturi je na desni strani enačaja pogosto predznak minus. To velja takrat, ko v izrazu za silo izpustimo predznak minus.